Aufgabe 2 – *Asymptotisches Wachstum.*

(a) (Leicht.) Sortieren Sie die folgenden Funktionen asymptotisch, d.h. entsprechend der O-Notation. Dabei bezeichnet $\log n$ den Logarithmus zur Basis 2, und $\ln n$ den natürlichen Logarithmus. In welchen Fällen haben Sie asymptotische Gleichheit $\Theta(.)$?

$$n, \quad 0.01n^2, \quad e^n, \quad \log n, \quad 2^{32}, \quad 2^n, \quad n+\sqrt{n},$$

$$\ln n, \quad \frac{n}{\log n}, \quad e^{\sqrt{\log n}}, \quad \log(n^2), \quad n^{1/4}, \quad n!$$

Recap

Mini cheat-sheet

$\lim_{n\to\infty}$: $1 < \log(\log(n)) < \log(n) < \sqrt{n} < n < n \cdot \log(n) < n \cdot \sqrt{n} < n^2 < 2^n < n! < n^n$

$n^x < x^n$ (x being fixed)

Sums

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Geometric series : $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

$$\sum_{k=0}^{3} 3^k = 3^0+3^1+3^2+3^3 = \frac{3^4-1}{3-1} = 40$$

Factorial

$$\frac{n}{2}^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq n^n$$

From Exercise Sheet 1 :

$\sum_{i=1}^{n} i^k \leq n^{k+1}$

$\sum_{i=1}^{n} i^k \geq \frac{1}{2^{k+1}} \cdot n^{k+1}$

$\sum_{i=1}^{n} i^k = \Theta(n^{k+1})$

Theorem 1 (Theorem 1.1 from the script). *Let N be an infinite subset of $\mathbb{N}$ and $f : N \to \mathbb{R}^+$ and $g : N \to \mathbb{R}^+$.*

- *If $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, then $f \leq O(g)$, but $f \neq \Theta(g)$.*
- *If $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = C \in \mathbb{R}^+$, then $f = \Theta(g)$.*
- *If $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$, then $f \geq \Omega(g)$, but $f \neq \Theta(g)$.*

$< n = n+\sqrt{n} < 0.01n^2 < 2^n < e^n < n!$

$= \ln n = \log(n^2) = 2 \cdot \log(n)$

$2^{32} < \log n < e^{\sqrt{\log n}} < n^{1/4} < \frac{n}{\log n}$

$$\frac{e^{\sqrt{\log n}}}{\log n} = \frac{e^{\sqrt{\log n}}}{e^{\log \log n}} = e^{\sqrt{\log n} - \log(\log n)} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

$\sqrt{x}$ $\quad$ $\log(x)$ $\quad$ $\rightsquigarrow \infty$

$$\frac{n^{1/4}}{e^{\sqrt{\log n}}} = \frac{e^{\log(n^{1/4})}}{e^{\sqrt{\log n}}} = e^{\log(n^{1/4}) - \sqrt{\log n}} = e^{1/4 \log(n) - \sqrt{\log n}} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

$\log(n^{1/4}) = 1/4 \cdot \log(n)$

Aufgabe 3 – *Induktion*

(a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2}}_{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Base Case: $(n=1)$ $\quad \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ $\quad \square$

I.H.: For some $k \in \mathbb{N}$ $\quad \frac{1}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$

I.S.: $k \to k+1$

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k+1\,(k+2)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\overset{I.H}{=} \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k(k+2)}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(k+1)}\cdot(k+2)}$$

$$= \frac{k+1}{(k+1)+1}$$

(b) Zeigen Sie die folgende *Ungleichung von Bernoulli*: Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ und alle $h \in \mathbb{R}$ mit $h \geq -1$ gilt:

$$1 + nh \leq (1+h)^n.$$

(b) Sei $h \geq -1$ fest vorgegeben. Wir verwenden Induktion über n.

Induktionsanfang:

Induktionsvoraussetzung:

Induktionsbehauptung:

Induktionsschritt: Es gilt

$$(1+h)^{n+1} = \qquad \geq \qquad = \qquad$$
$$\geq 1 + (n+1)h.$$

Aufgabe 4 – *Eine generelle Eigenschaft von Graphen*

Zeigen Sie, dass jeder Graph G mit $n \geq 2$ Knoten zwei Knoten $v \neq w$ enthält, sodass $deg(v) = deg(w)$.

Hinweis: Für ein gegebenes n, was ist der grösstmögliche Grad den ein Knoten haben kann?

To show: All G with $n \geq 2$

has 2 vertices $v \neq w$ s.t. $deg(v) = deg(w)$

Assume that G has n vertices

$\Rightarrow$ Vertices can have an edge with $0, 1, \dots, n-1$ other different vertices

$\Rightarrow$ If there is a vertex with a degree of $n-1$, then there can't be another vertex v with $deg(v) = 0$.
It's impossible to have a G with 2 vertices $v \neq w$ s.t. $deg(v) = 0$ and $deg(w) = n-1$

$\Rightarrow$ The vertices can have at most $n-1$ different degrees

$\cancel{0}, 1, \dots, n-1$ or $0, 1, \dots, \cancel{n-1}$

There are n vertices.

According to Pigeonhole Principle there are at least 2 vertices a, b with $deg(a) = deg(b)$

Aufgabe 5 – *Algorithmus*

Beschreiben Sie einen Algorithmus der das folgende Problem löst: Gegeben ist die Eingabe bestehend aus einen Graphen $G = (V, E)$ mit n Knoten (gehen Sie davon aus, dass der Graph als Adjazenzliste gegeben ist). Ihr Algorithmus soll "Ja" ausgeben, falls G ein Baum ist und "Nein" andernfalls.

Wie immer wenn Sie einen Algorithmus beschreiben gehöhrt zu einer vollständigen Lösung: eine klare Beschreibung des Algorithmus, ein Korrektheitsbeweis und eine Laufzeitanalyse.

Hinweis: Für diese Aufgabe dürfen Sie das Statement aus Aufgabe 6 ohne Beweis verwenden.

Given: $G(V,E)$ with n vertices

Return: Yes if G is a tree, otherwise no

Tree Properties:

$G(V,E)$, $|V| \geq 1$

G is a tree

$\Leftrightarrow$

G is connected and has no cycle

$\Leftrightarrow$

G is connected and $|E| = |V| - 1$

$\Leftrightarrow$

G has no cycle and $|E| = |V| - 1$

$\Leftrightarrow$

For all $x, y \in V$: G has only one x-y path

Algorithm Idea:

Count $|E|$

if $(|E| \neq |V| - 1)$ return "No"

DFS

if (we visit a vertex that is already visited) return "No"

return "Yes"

Aufgabe 6 – *Charakterisierung von Bäumen (Challenge-Aufgabe)*

Zeigen Sie: Ist $G = (V, E)$ ein Graph auf $|V| \geq 1$ Knoten, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) G ist zusammenhängend und kreisfrei (d.h. G ist ein Baum).

(b) G ist zusammenhängend und $|E| = |V| - 1$.

(c) G ist kreisfrei und $|E| = |V| - 1$.

(d) Für alle $x, y \in V$ gilt: G enthält genau einen x-y-Pfad.

Satz 1.6
im Skript