Bewertung	**0.00** von 60.00 (**0**%)

Information

Die Klasur besteht aus 6 Abschnitten (Part 1 - Part 6). Die Ersten 4 Abschnitte geben je 10 Punkte - sie bestehen aus Fragen ähnlich denen die sie in den Quizzes zur Vorlesung und den Minitests gesehen haben. Part 5 besteht aus schriftlichen Aufgaben, die insgesamt 20 Punkte geben. Bitte schreiben Sie die Lösungen zu diesen Aufgaben auf ein Extrablatt und geben Sie sie am Ende der Klausur ab. Der letzte Abschnitt besteht aus zwei Prgrammieraufgaben, die zusammen 20 Punkte geben.

Wir nehmen an, dass alle im Folgenden vorkommenden Grössen (bedingte Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerte, etc.) wohldefiniert sind/endlich sind/existieren.

Viel Erfolg!

Information

Formelsammlung

Information

Die folgenden Aussagen sind endweder wahr oder falsch. Für jede korrekte Antwort erhalten Sie +1 Punkt, leere oder falsche Antworten geben **keine** Minuspunkte.

Frage **1**

Nicht beantwortet

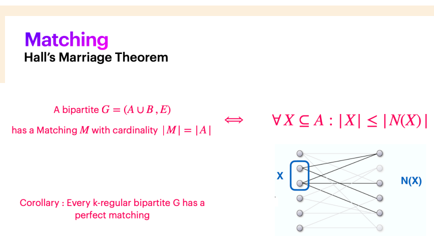
Erreichbare Punkte: 1.00

Sei $G = (A \uplus B, E)$ ein bipartiter Graph mit $|A| = |B|$. Für $X \subseteq V$ bezeichne $N(X)$ die Nachbarschaft von X. Falls es ein $X \subseteq A$ gibt, so dass $|N(X)| < |X|$, dann enthält G kein perfektes Matching.

Bitte wählen Sie eine Antwort:

- Wahr
- Falsch

Die richtige Antwort ist '



Frage **2**

Nicht beantwortet

Erreichbare Punkte: 1.00

Man kann in Zeit $O(|V| + |E|)$ entscheiden, ob ein Graph $G = (V, E)$ 2-Knoten-zusammenhängend ist. (G ist als Adjazenzliste gegeben.)

Bitte wählen Sie eine Antwort:

- Wahr
- Falsch

Die richtige Antwort ist

articulation points

DFS-VISIT-ITERATIVE(G, v)

$S \leftarrow \emptyset$
PUSH(S, v)
while $S \neq \emptyset$ **do**
  $w \leftarrow$ POP(S)
  if w noch nicht besucht **then**
    Markiere w als besucht
    for each $(w, x) \in E$ in reverse order **do**
      if x noch nicht besucht **then**
        PUSH(S, x)

Connectivity
Definitions

- A $G = (V, E)$ is k - (vertex) connected if
  - $|V| \geq k + 1$
  - $\forall X \subseteq V$ with $|X| < k$, $G[V \backslash X]$ is connected

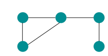
" The G remains connected whenever fever than k vertices are removed"

" At least k vertices must be removed to make the G disconnected"

Articulation Points and Bridges
Definitions

- Let $G = (V, E)$ be connected.

A vertex $v \in V$ is an articulation point (cut vertex) iff $G[V \setminus \{v\}]$ is not connected



Frage **3**

Nicht beantwortet

Erreichbare Punkte: 1.00

Ein Matching, für das es keinen augmentierenden Pfad gibt, ist inklusionsmaximal.

Bitte wählen Sie eine Antwort:

- Wahr
- Falsch

Die richtige Antwort ist

Matching
Definitions

- inclusion-maximal : "no edge can be added to this matching"
  - A matching $M \subseteq E$ is inclusion-maximal , if there is no other matching M' s.t. $M \subseteq M'$ (strict inclusion) and $|M'| > |M|$
- (cardinality-) maximum : "one can't find a bigger matching"
  - A matching $M \subseteq E$ is (cardinality-) maximum , if there is no other matching M' s.t. $|M'| > |M|$

Matching
Berge's Theorem

- Augmenting Path : "path with edges not in M, in M, ... , not in M "
  - An augmenting path is an alternating path that starts from and ends on unmatched/not covered vertices
  - Alternating Path :
    - An alternating path is a path that begins with an unmatched/not covered vertex whose edges belong alternately to the matching and not to the matching

A Matching M is (cardinality-) maximum $\Longleftrightarrow$ There's no M-augmenting path

Idea : To find the maximum matching, update/improve the matching until there is no augmenting path left

Matching
Propositions

- M_{inc} : inclusion-maximal Matching , M_{max} : cardinality-maximum Matching

$$|M_{inc}| \leq |M_{max}|$$

$$|M_{inc}| \geq |M_{max}| \;/\; 2$$

Why ?

Every edge in M_{max} must have at least one endpoint in M_{inc}

Otherwise, that edge would be added to M_{inc}

$$|M_{max}| \leq |Endpoints\ in\ M_{inc}| = 2\,|M_{inc}|$$

Frage **4**

Nicht beantwortet

Erreichbare Punkte: 1.00

Sei G ein Graph mit n Knoten, wobei n gerade ist. Wir gehen davon aus, dass $n/2$ Knoten weiss gefärbt sind und $n/2$ Knoten schwarz gefärbt sind.

Wir betrachten folgenden zufälligen Prozess. In der ersten Runde wählen wir einen Knoten uniform zufällig aus und besuchen diesen Knoten. In jeder weiteren Runde wählen wir einen uniform zufälligen Nachbarn des Knoten aus, bei dem wir uns gerade befinden, und besuchen diesen Nachbarn. Welchen Nachbarn wir in einer Runde wählen, ist dabei unabhängig von allen anderen Runden.

Der Prozess dauert insgesamt k Runden. Mit X bezeichnen wir die Anzahl schwarz-gefärbter Knoten die wir in diesen k Runden besuchen.

Aus Chernoffs Ungleichung folgt, dass

$$\Pr\left[X \geq (1+\delta)\frac{k}{2}\right] \leq e^{-\frac{1}{3}\delta^2\frac{k}{2}}.$$

Bitte wählen Sie eine Antwort:

- Wahr
- Falsch

Die richtige Antwort ist 'I

Frage **5**

Nicht beantwortet

Erreichbare Punkte: 1.00

Drei Ereignisse A, B, C heissen unabhängig genau dann wenn $Pr[A \cap B \cap C] = Pr[A] \cdot Pr[B] \cdot Pr[C]$.

Bitte wählen Sie eine Antwort:

- Wahr
- ~~Falsch~~

Die richtige Antwort ist

- Event A and B are independent , if

$$Pr[A \cap B] = Pr[A] \cdot Pr[B]$$

- Events A ,B and C are independent , if

$$\Pr[A \cap B \cap C] = \Pr[A] \cdot \Pr[B] \cdot \Pr[C]$$

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$$
$$\Pr[A \cap C] = \Pr[A] \cdot \Pr[C]$$
$$\Pr[B \cap C] = \Pr[B] \cdot \Pr[C]$$

Frage **6**

Nicht beantwortet

Erreichbare Punkte: 1.00

Sei X eine diskrete Zufallsvariable. Dann gilt

$b=$

$\mathrm{Var}[X - \mathrm{Var}[X]] = 0.$ $\mathrm{Var}[X]$

Varianz

- **Definition:** $\mathrm{Var}[X] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.
- **Translation:** Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{Var}[a \cdot X + b] = a^2 \cdot \mathrm{Var}[X]$.
- **Standardabweichung:** $\sigma[X] := \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$.
- **Additivität:** Für unabhängige $X_1, \ldots, X_n$ gilt $\mathrm{Var}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathrm{Var}[X_1] + \ldots + \mathrm{Var}[X_n]$.

Bitte wählen Sie eine Antwort:

- Wahr
- Falsch

Die richtige Antwort ist '

Frage **7**

Nicht beantwortet

Erreichbare Punkte: 1.00

Seien f ein Fluss und (S, T) ein $s - t$-Schnitt im Netzwerk $N = (V, A, c, s, t)$.

Falls $val(f) < cap(S, T)$, dann ist weder f maximal noch (S, T) minimal.

Bitte wählen Sie eine Antwort:

- Wahr
- Falsch

$val(f) \leq cap(S,T)$

Die richtige Antwort ist 'Falsch'.

- Maxflow-Mincut Theorem :

  Every network satisfies

  $$\max_{f} \mathrm{val}(f) = \min_{(S,T)\ \text{s-t-cut}} \mathrm{cap}(S,T)$$

Frage **8**

Nicht beantwortet

Erreichbare Punkte: 1.00

Betrachten Sie ein Netzwerk $N = (V, A, c, s, t)$ ohne entgegen gerichtete Kanten, einen Fluss f auf N, und das dazugehörige Restnetzwerk N_f. Wir sagen, dass ein Knoten $v \in V$ erreichbar ist, wenn es einen Pfad von s zu v in N_f gibt. Wir bezeichnen X die Menge der erreichbaren Knoten.

S

Ist f maximal, dann ist $(X, V \setminus X)$ ein minimaler $s - t$-Schnitt in N.

$(X, V\setminus X)$

Bitte wählen Sie eine Antwort:

- Wahr
- Falsch

S T

Die richtige Antwort ist 'Wahr'.

Frage **9**

Nicht beantwortet

Erreichbare Punkte: 1.00

Sei P eine endliche Punktemenge in der Ebene und $C(P)$ der kleinste umschliessende Kreis von P. Sei K die Kreisscheibe von C, d.h. der Kreis mitsamt seinem Inneren. Dann gilt $\mathrm{conv}(P) \subseteq K$.

Bitte wählen Sie eine Antwort:

- Wahr
- Falsch

Die richtige Antwort ist 'Wahr'.

Frage **10**

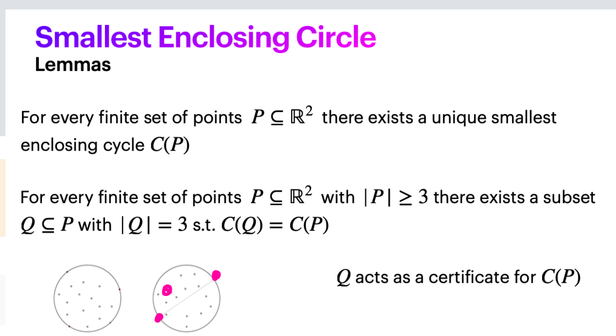
Nicht beantwortet

Erreichbare Punkte: 1.00

Sei $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ eine Menge von drei Punkten in der Ebene in allgemeiner Lage. Der kleinste umschliessende Kreis von P ist der eindeutige Kreis, der alle drei Punkte auf seinem Rand hat.

Bitte wählen Sie eine Antwort:

- Wahr
- Falsch



Die richtige Antwort ist 'Falsch'.

Information

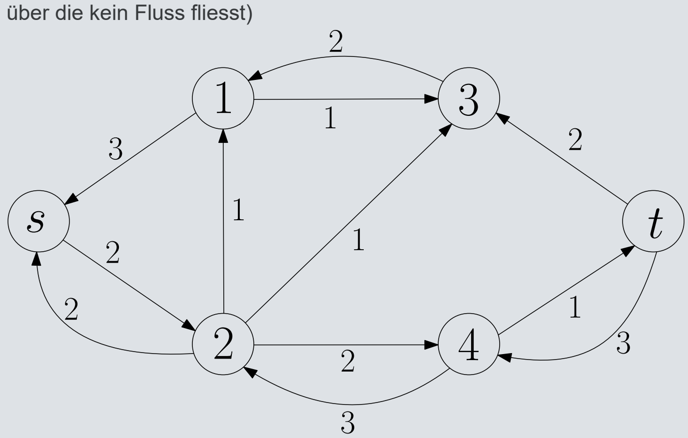
In diesem Block gibt es zwei Fragen, die jeweils 5 Punkte wert sind. In jeder Aufgabe müssen Sie einen Algorithmus aus der Vorlesung wiedergeben oder anwenden.

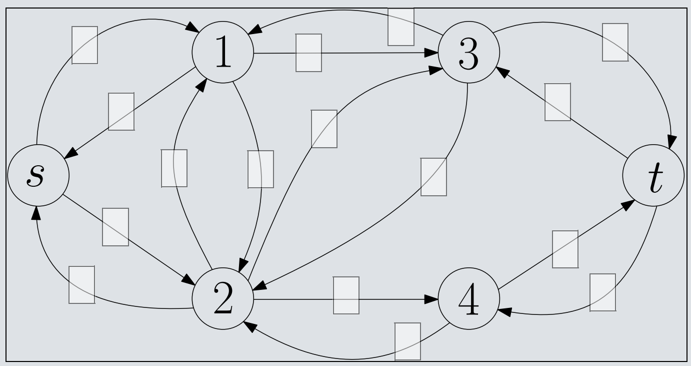
Frage **11**

Nicht beantwortet

Erreichbare Punkte: 5.00

Sei N ein Netzwerk ohne entgegengesetzte Kanten. Betrachten Sie das abgebildete Restnetzwerk R_f. Berechnen Sie den zugehörigen Fluss f und ziehen Sie die Flusswerte auf die entsprechenden Kanten (verwenden Sie die 0 für Kanten, über die kein Fluss fliesst)





1 2 3 4 5 6 7 8 0

Die Antwort ist falsch.

Frage **12**

Nicht beantwortet

Erreichbare Punkte: 5.00

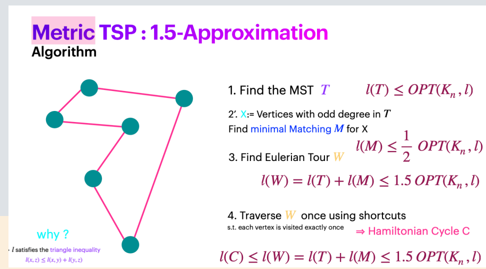
function Metric_TSP_Approximation(G):

1. Finde ein/e (gewichts-)minimale/n/s [ ] ✖ T in G.

2. Sei W die Menge von Knoten in T deren Grad [ ] ✖

3. Finde ein/e (gewichtsminimale/n/s [ ] ✖ M von W.

4. Finde ein/e [ ] ✖ S im (Multi-)Graph



- ○ $M \cup G$
- ○ $G \setminus M$
- ○ $M \cup T$
- ○ $(G \setminus T) \cup M$

Erreichte Punkte 0.00 von 1.00

Die richtige Antwort ist: $M \cup T$

5. Wandle S in einen Hamiltonkreis mit gleichem oder kleinerem Gewicht um, indem alle doppelten Knoten übersprungen werden.

In der Klausur werden wir diese Aufgabe manuell nach korrigieren und richtige Antworten, die nicht in unserer Liste sind hinzufügen, sodass Sie die Punkte bekommen, auch wenn Sie nicht den exakten Wortlaut getroffen haben.

Information

In diesem Fragenblock gibt es zwei Fragetypen. Entweder ist die Antwort eine Zahl, welche Sie direkt ins Antwortfeld eingeben oder Sie wählen die richtige Antwort aus vier Möglichkeiten aus. Jede richtige Antwort gibt 2 Punkte.

Frage **13**

Nicht beantwortet

Erreichbare Punkte: 2.00

Max wirft 10 faire Münzen. Leider hat er vergessen vorher das Fenster zu schliessen und jede seiner Münzen wird mit Wahrscheinlichkeit p von einer Elster gestohlen (unabhängig von den anderen Münzen).

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Max wenigstens eine Münze, die Zahl zeigt, behält?

- $1-(1-(1-p)/2)^{10}$
- $1-(1-p)^{10}/2^{10}$
- $1-p^{10}$
- $5\cdot(1-p)$

$\left(\frac{1-p}{2}\right)^{10}$

1 coin not stolen

B_i : i-te coin is there (not stolen)

Z_i : i-te coin is Zahl

Bewertungsmethode: **SC1/0**

$1-(1-(1-p)/2)^{10}$
: Richtig
$1-(1-p)^{10}/2^{10}$
: Nicht richtig
$1-p^{10}$
: Nicht richtig
$5\cdot(1-p)$
: Nicht richtig

Frage **14**

Nicht beantwortet

Erreichbare Punkte: 2.00

$\frac{1}{5}$

Sei $\Omega=\{-3,-2,0,2,3\}$ ein Laplaceraum und sei ω ein (zufälliges) Elementarereignis in Ω. Berechnen Sie $E[|\omega|]$.

Antwort:

Die richtige Antwort ist: 2

$3\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\frac{1}{5}$

Frage **15**

Nicht beantwortet

Erreichbare Punkte: 2.00

P

X $\to$ 1 : 1/2

X $\to$ 0 : 1/2

Y $\to$ 1 : 1/2

Y $\to$ 0 : 1/2

Seien X, Y zwei Indikatorzufallsvariablen die $\Pr[X=0] = \Pr[X=1] = \Pr[Y=0] = \Pr[Y=1] = \frac{1}{2}$ und $\Pr[X=Y] = 0$ erfüllen.

Berechnen Sie $\mathrm{Var}((2X-Y)\cdot Y)$.

Antwort: 0.25

Die richtige Antwort ist: 0.25

Varianz

- **Definition:** $\mathrm{Var}[X] := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \boxed{\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2}$.
- **Translation:** Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{Var}[a \cdot X + b] = a^2 \cdot \mathrm{Var}[X]$.
- **Standardabweichung:** $\sigma[X] := \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$.
- **Additivität:** Für unabhängige $X_1, \ldots, X_n$ gilt $\mathrm{Var}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathrm{Var}[X_1] + \ldots + \mathrm{Var}[X_n]$.

Z

$\mathrm{Var}[2XY - Y^2]$

$2 \cdot 1 \cdot 0 - 0^2$

$2 \cdot 0 \cdot 1 - 1^2$

Unabhängigkeit

- **Definition:** $X_1, \ldots, X_n$ heissen genau dann unabhängig, wenn für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in W_{X_1} \times \ldots \times W_{X_n}$ gilt: $\Pr[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n = x_n]$.
- **Multiplikationsformel:** Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und $S_i \subseteq W_{X_i}$, dann gilt: $\Pr[X_1 \in S_1, \ldots, X_n \in S_n] = \Pr[X_1 \in S_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n \in S_n]$.
- **Transformationen:** Seien $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wenn $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind, dann gilt dies auch für $f(X_1), \ldots, f(X_n)$.
- **Summe:** Sind X, Y unabhängig und $Z := X + Y$, so gilt $f_Z(z) = \sum_{x \in W_X} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)$.

Abschätzungen

- **Boolesche Ungleichung, Union Bound:** $\Pr[\bigcup_{i=1}^n A_i] \leq \sum_{i=1}^n \Pr[A_i]$.
- **Markov:** Ist $W_X \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so ist $\Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$ bzw. $\Pr[X \geq t \cdot \mathbb{E}[X]] \leq \frac{1}{t}$.
- **Chebyshev:** Für $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist $\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{t^2}$ bzw. $\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t \cdot \sigma[X]] \leq \frac{1}{t^2}$.
- **Chernoff:** Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und Bernoulli-verteilt, $X := \sum_{i=1}^n X_i$ und $\delta \in [0,1]$. Dann ist

$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mathbb{E}[X]] \leq e^{-\frac{1}{3}\delta^2 \mathbb{E}[X]},$$
$$\Pr[X \leq (1-\delta)\mathbb{E}[X]] \leq e^{-\frac{1}{2}\delta^2 \mathbb{E}[X]},$$
$$\Pr[X \geq t] \leq 2^{-t} \qquad \text{für } t \geq 2e\mathbb{E}[X].$$

X = 1, Y = 0: $\boxed{Z = 0}$ ✓

X = 0, Y = 1: $\boxed{Z = -1}$ ✓

$\mathrm{Var}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = 0.25$

$\mathbb{E}[Z^2] = 0.5$

$\mathbb{E}[Z]^2 = (-0.5)^2 = 0.25$

Frage **16**

Nicht beantwortet

Erreichbare Punkte: 2.00

In der Vorlesung haben wir den Miller-Rabin Test gesehen, der bestimmt, ob eine Zahl n prim ist. Wir rufen den Test **MillerRabin**(n) insgesamt k mal auf und speichern den Output aller Aufrufe. Welche der folgenden Optionen ist die beste Art, anhand der Liste von k Outputs einen einzigen Output zu generieren, um die Fehlerwahrscheinlichkeit des Tests zu verkleinern?

- ○ Falls der Algorithmus bei mindestens einem der k Aufrufe "nicht prim" ausgibt, geben wir "nicht prim" aus. Ansonsten geben wir "prim" aus. S
- ○ Unabhängig davon, welche Strategie wir verfolgen, ist es unmöglich, die Fehlerwahrscheinlichkeit geringer zu machen, als sie ist, wenn wir **MillerRabin**(n) nur einmal aufrufen. S
- ○ Falls der Algorithmus bei mindestens einem der k Aufrufe "prim" ausgibt, geben wir "prim" aus. Ansonsten geben wir "nicht prim" aus. S
- ○ Wir geben den Output aus, der am häufigsten unter den k Outputs ausgegeben wurde. Falls beide outputs gleichhäufig sind, geben wir einen beliebigen Output aus. S

Bewertungsmethode: **SC1/0**

Falls der Algorithmus bei mindestens einem der k Aufrufe "nicht prim" ausgibt, geben wir "nicht prim" aus. Ansonsten geben wir "prim" aus.

: Richtig
Unabhängig davon, welche Strategie wir verfolgen, ist es unmöglich, die Fehlerwahrscheinlichkeit geringer zu machen, als sie ist, wenn wir **MillerRabin**(n) nur einmal aufrufen.
: Nicht richtig
Falls der Algorithmus bei mindestens einem der k Aufrufe "prim" ausgibt, geben wir "prim" aus. Ansonsten geben wir "nicht prim" aus.
: Nicht richtig
Wir geben den Output aus, der am häufigsten unter den k Outputs ausgegeben wurde. Falls beide outputs gleichhäufig sind, geben wir einen beliebigen Output aus.
: Nicht richtig

Frage **17**

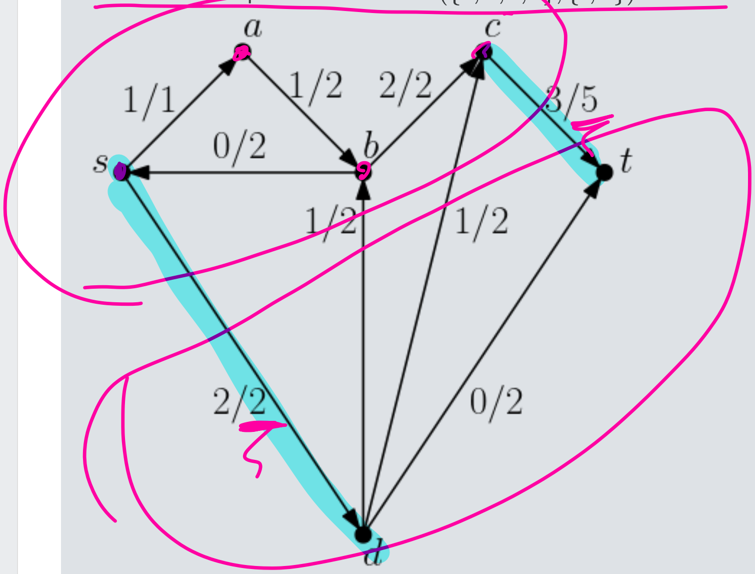
Nicht beantwortet

Erreichbare Punkte: 2.00

Das folgende Bild zeigt einen Fluss in einem Netzwerk $N = (V, A, c, s, t)$, wobei "x/y" bedeutet, dass eine Kante Fluss x hat und Kapazität y.

f x / c y

Berechne die Kapazität des Schnitts $(\{s, a, b, c\}, \{t, d\})$.



Antwort: 2+5=7

Die richtige Antwort ist: 7

Information

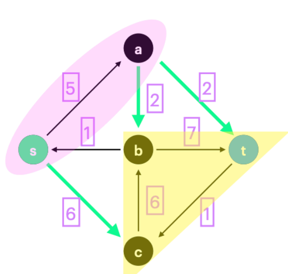
Für jede Frage bekommen Sie genau dann 2 Punkte, wenn alle Ihre Antworten korrekt sind. Für 3 korrekte Antworten erhalten Sie noch 1 Punkt, für 2 und weniger gibt es 0 Punkte.

Flow
Definitions

- s-t-cut (S, T) for a network (V, A, c, s, t)
  - is a partition of V Partition (S, T): $S \cup T = V$ und $S \cap T = \emptyset$
  - (S, T) with $s \in S$ and $t \in T$

- capacity of an s-t-cut (S, T)

$$\mathrm{cap}(S, T) := \sum_{(u,w) \in (S \times T) \cap A} c(u, w)$$



$$\mathrm{cap}(S, T) = 6 + 2 + 2 = 10$$

Frage **18**

Nicht beantwortet

Erreichbare Punkte: 2.00

Sei P eine Punktemenge von n Punkten in allgemeiner Lage. Angenommen, es ist bekannt das höchstens 10 Punkte auf der konvexen Hülle von P liegen. Wir machen keine weiteren Annahmen über die Punktmenge.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr/falsch?

Richtig	Falsch		
○	○	Die Punkte in P lassen sich in Zeit $O(n)$ nach x-Koordinate sortieren.	✖
○	○	Die konvexe Hülle von P lässt sich in Zeit $O(n)$ berechnen.	✖
○	○	Der Algorithmus "Jarvis Wrap" kann verwendet werden, um die konvexe Hülle von P in Zeit $O(n)$ zu finden.	✖
○	○	Sei P' die Menge der Punkte auf der konvexen Hülle von P. Dann gilt, dass der kleinste umschliessende Kreis von P gleich dem kleinsten umschliessenden Kreis von P', also $C(P) = C(P')$.	✖

Bewertung: **Kprim**

Die Punkte in P lassen sich in Zeit $O(n)$ nach x-Koordinate sortieren.

: Falsch

Die konvexe Hülle von P lässt sich in Zeit $O(n)$ berechnen.

: Richtig

Der Algorithmus "Jarvis Wrap" kann verwendet werden, um die konvexe Hülle von P in Zeit $O(n)$ zu finden.

: Richtig

Sei P' die Menge der Punkte auf der konvexen Hülle von P. Dann gilt, dass der kleinste umschliessende Kreis von P gleich dem kleinsten umschliessenden Kreis von P', also $C(P) = C(P')$.

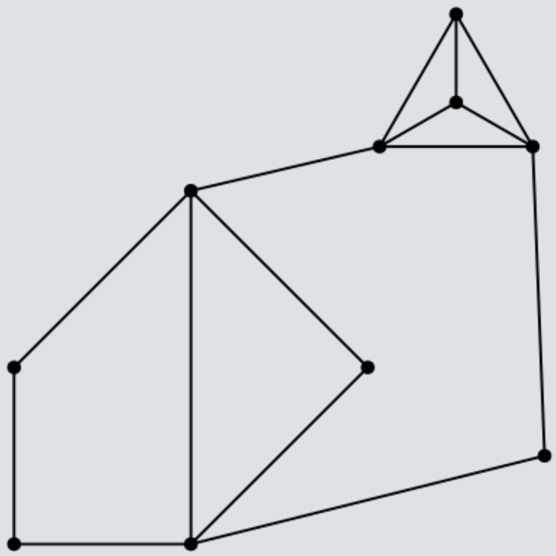
: Richtig

Frage **19**

Nicht beantwortet

Erreichbare Punkte: 2.00

Gegeben sei folgender Graph.



Geben Sie an, ob folgende Aussagen wahr/falsch sind.

Richtig	Falsch		
○	○	Der Graph ist 2-Kanten-zusammenhängend.	✖
○	○	Der Graph ist 2-Knoten-zusammenhängend.	✖
○	○	Der Graph enthält eine Eulertour.	✖
○	○	Der Graph hat chromatische Zahl 4.	✖

Bewertung: **Kprim**

Eulerian Cycle
Lemma

A connected G has a eulerian Cycle $\iff$ Every vertex has an even degree

Der Graph ist 2-Kanten-zusammenhängend.: Richtig

Der Graph ist 2-Knoten-zusammenhängend.: Richtig

Der Graph enthält eine Eulertour.: Falsch

Der Graph hat chromatische Zahl 4.: Richtig

Coloring
Definitions

Color vertices in a way that no two vertices that share an edge are of the same color

- (Vertex-) Coloring :
  - A (vertex-) coloring of $G = (V, E)$ with k colors is a mapping $c : V \to [k]$ s.t. $c(u) \neq c(v)$ for all edges $\{u, v\} \in E$
- Chromatic Number :
  - The chromatic number $\chi(G)$ is the minimum number of colors needed to color a graph
  - equivalent : $\chi(G) \leq k \iff G$ is k-partite

- A $G = (V, E)$ is k-edge connected if
  - $\forall X \subseteq E$ with $|X| < k$, $G(V, E \setminus X)$ is connected

" The G remains connected whenever fever than k edges are removed"

" At least k edges must be removed to make the G disconnected"

How to find the k-edge connectivity?

Start from 1-edge connected, increase one by one !

(Every connected G is 1-edge connected)

- A $G = (V, E)$ is k - (vertex) connected if
  - $|V| \geq k + 1$
  - $\forall X \subseteq V$ with $|X| < k$, $G[V \setminus X]$ is connected

" The G remains connected whenever fever than k vertices are removed"

" At least k vertices must be removed to make the G disconnected"

Frage **20**

Nicht beantwortet

Erreichbare Punkte: 2.00

Seien A, B, C unabhängige Ereignisse. Welche der folgenden Gleichungen sind immer wahr?

Richtig	Falsch		
○	○	$\Pr[A] + \Pr[B] \leq \Pr[A \cup B]$	✖
○	○	$\Pr[A \vert B \cap C] = \Pr[A \vert B \cup C]$	✖
○	○	$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$	✖
○	○	$\Pr[(A \cup B) \cap C] = (\Pr[A] + \Pr[B]) \cdot \Pr[C]$	✖

Bewertung: **Kprim**

$\Pr[A] + \Pr[B] \leq \Pr[A \cup B]$
: Falsch

$\Pr[A|B \cap C] = \Pr[A|B \cup C]$
: Richtig

$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$
: Richtig

$\Pr[(A \cup B) \cap C] = (\Pr[A] + \Pr[B]) \cdot \Pr[C]$
: Falsch

Unabhängigkeit

- **Definition:** $X_1, \ldots, X_n$ heissen genau dann unabhängig, wenn für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in W_{X_1} \times \ldots \times W_{X_n}$ gilt: $\Pr[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n = x_n]$.
- **Multiplikationsformel:** Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und $S_i \subseteq W_{X_i}$, dann gilt: $\Pr[X_1 \in S_1, \ldots, X_n \in S_n] = \Pr[X_1 \in S_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n \in S_n]$.
- **Transformationen:** Seien $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wenn $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind, dann gilt dies auch für $f(X_1), \ldots, f(X_n)$.
- **Summe:** Sind X, Y unabhängig und $Z := X + Y$, so gilt $f_Z(z) = \sum_{x \in W_X} f_X(x) \cdot f_Y(z - x)$.

Abschätzungen

- **Boolesche Ungleichung, Union Bound:** $\Pr\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] \leq \sum_{i=1}^n \Pr[A_i]$.
- **Markov:** Ist $W_X \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so ist $\Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$ bzw. $\Pr[X \geq t \cdot \mathbb{E}[X]] \leq \frac{1}{t}$.
- **Chebyshev:** Für $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist $\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{t^2}$ bzw. $\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t \cdot \sigma[X]] \leq \frac{1}{t^2}$.
- **Chernoff:** Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und Bernoulli-verteilt, $X := \sum_{i=1}^n X_i$ und $\delta \in [0, 1]$. Dann ist

$$\begin{aligned} \Pr[X \geq (1+\delta)\mathbb{E}[X]] &\leq e^{-\frac{1}{3}\delta^2 \mathbb{E}[X]}, \\ \Pr[X \leq (1-\delta)\mathbb{E}[X]] &\leq e^{-\frac{1}{2}\delta^2 \mathbb{E}[X]}, \\ \Pr[X \geq t] &\leq 2^{-t} \qquad \text{für } t \geq 2e\mathbb{E}[X]. \end{aligned}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

- **Definition:** Ist $\Pr[B] > 0$, so ist $\Pr[A|B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$.
- **Multiplikationssatz:** Ist $\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] > 0$, so ist

$$\Pr[A_1 \cap \cdots \cap A_n] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2|A_1] \cdot \Pr[A_3|A_1 \cap A_2] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}].$$

- **Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:**
  Ist $\Omega = A_1 \uplus \cdots \uplus A_n$ mit $\Pr[A_1], \ldots, \Pr[A_n] > 0$, so gilt $\Pr[B] = \sum_{i=1}^n \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]$.
- **Satz von Bayes:**
  Ist $B \subseteq A_1 \uplus \cdots \uplus A_n$ mit $\Pr[A_1], \ldots, \Pr[A_n], \Pr[B] > 0$, so gilt

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^n \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]}.$$

Frage **21**

Nicht beantwortet

Erreichbare Punkte: 2.00

Wir betrachten eine Variante des Target Shooting Algorithmus, den wir in der Vorlesung gesehen haben. Bitte beachten Sie, dass es sich nicht um genau den gleichen Algorithmus handelt. Wir gehen, wie in der Vorlesung davon aus, dass es eine unbekannte Menge S gibt, die Teilmenge einer bekannten Menge U ist. Ausserdem können wir Elemente $u \in U$ uniform zufällig auswählen und überprüfen, ob $u \in S$.

Angenommen, wir wählen so oft zufällige Elemente $u \in U$ aus, bis wir insgesamt 100 Elemente gesehen haben, die $u \in S$ erfüllen. Sei X die Anzahl an Elementen, die wir auswählen müssen, bis das zutrifft.

Richtig	Falsch		
	X	X ist geometrisch verteilt.	✖
	X	Falls $X = 100$, dann $\lvert S\rvert = \lvert U\rvert$.	✖
X		Falls $\lvert S\rvert = \lvert U\rvert$, dann $X = 100$.	✖
X		$\mathbb{E}[X] = 100\lvert U\rvert/\lvert S\rvert$	✖

Bewertung: **Kprim**

$\mathbb{E}[X] = \frac{n}{p}$

X ist geometrisch verteilt.

: Falsch

Falls $X = 100$, dann $|S| = |U|$.

: Falsch

Falls $|S| = |U|$, dann $X = 100$.

: Richtig

$\mathbb{E}[X] = 100|U|/|S|$: Richtig

Frage **22**

Nicht beantwortet

Erreichbare Punkte: 2.00

Welche der folgenden Probleme können -- mithilfe von Ideen aus dem Kurs -- als Fluss-Probleme modelliert und gelöst werden?

Richtig	Falsch		
○	○	Herausfinden, ob ein Graph G 2-Kanten-zusammenhängend ist.	✖
○	○	Den längsten Pfad in einem Graph G finden.	✖
○	○	Herausfinden, ob ein Graph G 2-Knoten-zusammenhängend ist.	✖
○	○	Herausfinden, ob ein bipartiter Graph G ein perfektes Matching hat.	✖

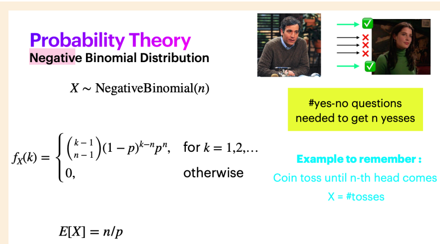
Bewertung: **Kprim**

Herausfinden, ob ein Graph G 2-Kanten-zusammenhängend ist.
: Richtig

Den längsten Pfad in einem Graph G finden.
: Falsch

Herausfinden, ob ein Graph G 2-Knoten-zusammenhängend ist.
: Richtig

Herausfinden, ob ein bipartiter Graph G ein perfektes Matching hat.
: Richtig



Information

Im Folgenden finden Sie zwei schriftliche Aufgaben, die zusammen 20 Punkte geben. Bearbeiten Sie die Aufgaben auf Papier und geben Sie sie am Ende der Prüfung ab. Verwenden Sie das vorgegebene Deckblatt und denken Sie daran, Ihren Namen auf jedes Blatt zu schreiben.

Articulation Points and Bridges

Lemma

- Let $G = (V, E)$ be a connected graph.

$\{x, y\} \in E$ is a bridge $\Rightarrow$ deg(x) = 1 or x is an articulation point

$\not\Leftarrow$

mi

Information

$\cancel{k} \cdot |A| = \cancel{k} \cdot |B|$

Zeigen/Widerlegen Sie folgende Aussagen

a) Sei $G = (A \uplus B, E)$ ein regul"arer bipartiter Graph mit $E \neq \emptyset$. Dann ist $|A| = |B|$.

b) Seien X und Y unabh"angige Zufallsvariablen. Dann gilt $\mathbb{E}[\max(X, Y)] = \max(\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y])$

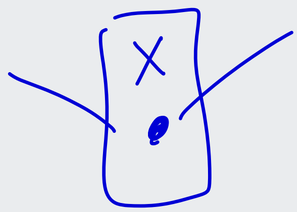
-1, 0, 1

c) Sei v ein Knoten, der inzident zu mindestens zwei Brücken ist. Dann ist u ein Artikulationsknoten.

2 bridges

Y = -1

jeweils 4 Punkte



Information

In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass man jeden Graphen mit $\Delta + 1$ Farben färben kann, wobei $\Delta$$ der Maximalgrad von G ist. In dieser Aufgabe wollen wir diese Schranke für einige Graphen verbessern. Sei $G = (V, E)$ ein Graph, zeigen Sie die folgende Aussage:

Wenn es eine Menge $K \subseteq V$ gibt, sodass für alle $v \in K$ gilt, dass $\deg(v) \leq k$ und für alle anderen Knoten $w \in V \setminus K$ gilt $\deg(w, V \setminus K) \leq k$, wobei $\deg(w, V \setminus K)$ die Anzahl der Kanten vom Knoten w in die Menge $V \setminus K$ ist, dann kann man G mit $k + 1$ Farben färben.

8 Punkte